Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2020, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Análisis

Considera la función f definida por $\mathbf{f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-1}}$ para $\mathbf{x \neq 1, -1}$.

a) **Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.**
b) **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.**

Solución:

a) **Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.**

Estudio de asíntotas:

1. Asíntotas verticales:
Son posibles en los puntos que anulan el denominador:
$$x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$
Estudiamos los límites laterales:
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1-2-3}{0^+} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty.$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1+2-3}{0^+} = 0^+, \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{0^-}{0^-} = 0^-.$$
Por tanto, la única asíntota vertical es:
$$x = 1.$$
2. Asíntotas horizontales:
Estudiamos el límite cuando $x \to \pm\infty$:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$
Existe una asíntota horizontal:
$$y = 1.$$
3. Asíntotas oblicuas:
No existen, pues ya se halló una asíntota horizontal.

Por lo tanto, las asíntotas encontradas son:
$$\boxed{x = 1, \quad y = 1}$$

b) **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.**

Hallamos la derivada mediante la regla del cociente:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2-1)-(x^2-2x-3)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x^2+6x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^2+4x+2}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2+2x+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x+1)^2}{(x^2-1)^2}. \end{aligned}$$
El denominador siempre es positivo (excepto $x = \pm 1$), y el numerador también es siempre positivo (excepto $x = -1$), por lo tanto, $f'(x) > 0$ en su dominio. Esto implica que la función es siempre creciente en los intervalos de su dominio:
$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, +\infty).$$

No hay intervalos de decrecimiento.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Creciente en } (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty); \quad \text{No decrece}}$$

Ejercicio 2. Análisis

Calcula $\mathbf{a > 0}$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = xe^{3x}}$, el eje de abscisas y la recta $\mathbf{x = a}$ vale $\mathbf{\frac{1}{9}}$.

Solución:

El área solicitada es la siguiente integral definida:

$$\int_0^a xe^{3x}\,dx = \frac{1}{9}.$$

Nótese que hemos tenido en cuenta que $f(x) = xe^{3x} \geq 0$, $\forall x \in [0, a]$. Para resolver esta integral utilizamos integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

con la elección:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad dv = e^{3x}dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{3x}}{3}.$$

Aplicando integración por partes:

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{3x}}{3} + C = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C.$$

Evaluamos la integral definida entre los límites 0 y a:

$$\int_0^a xe^{3x}\,dx = \left[\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right]_0^a = \frac{1}{9}.$$

Sustituyendo los límites:

$$\left(\frac{ae^{3a}}{3} - \frac{e^{3a}}{9}\right) - \left(\frac{0 \cdot e^0}{3} - \frac{e^0}{9}\right) = \frac{1}{9},$$

y simplificando:

$$\frac{ae^{3a}}{3} - \frac{e^{3a}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$

Simplificamos la ecuación restando $\frac{1}{9}$ en ambos lados:

$$\frac{ae^{3a}}{3} - \frac{e^{3a}}{9} = 0.$$

Factorizamos la expresión:

$$e^{3a}\left(\frac{a}{3} - \frac{1}{9}\right) = 0.$$

Como $e^{3a} \neq 0$, necesariamente:

$$\frac{a}{3} - \frac{1}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{3} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = \frac{1}{3}}$$

Ejercicio 3. Álgebra

Considera la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$**.**

a) **Estudia el rango de A según los valores de m.**
b) **Para m = 2, calcula la inversa de 2020A.**

Solución:

a) **Estudia el rango de A según los valores de m.**

Calculamos primero el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & m+1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & m+1 \\ m & 5 \end{vmatrix} + (m+2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ &= (5-0) + (0 - m(m+1)) + (m+2)(0-m) \\ &= 5 - m^2 - m - m^2 - 2m \\ &= 5 - 2m^2 - 3m. \end{aligned}$$

Analizamos cuándo este determinante es cero:

$$5 - 2m^2 - 3m = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m^2 + 3m - 5 = 0.$$

Resolvemos la ecuación:

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4},$$

y por lo tanto:

$$m = 1 \quad \text{o} \quad m = -\frac{5}{2}.$$

Así,

- Si $m \neq 1, -\frac{5}{2}$, entonces $|A| \neq 0$ y el rango es 3.
- Para $m = 1$ o $m = -\frac{5}{2}$, el determinante es 0, y debemos verificar submatrices de orden 2:
  - Si $m = 1$, hay submatriz $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces el rango es 2.
  - Si $m = -\frac{5}{2}$, también encontramos fácilmente submatrices de orden 2 no nulas (como la anterior), por tanto el rango también es 2.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{rango}(A) = \begin{cases} 3, & \text{si } m \neq 1, -\frac{5}{2} \\ 2, & \text{si } m = 1 \text{ o } m = -\frac{5}{2} \end{cases}}$$

b) Para m = 2, calcula la inversa de 2020A.

Si $m = 2$, la matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Primero, calculamos el determinante $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1(5) - (-1)(-6) + 4(-2) = 5 - 6 - 8 = -9 \neq 0.$$

Para calcular la inversa, necesitamos la matriz adjunta, que se forma con los cofactores:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T,$$

donde cada cofactor es el determinante menor correspondiente con su signo alternado. Calculamos cada cofactor por separado:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(-6) = 6, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(-5) = 5, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 0) = -3, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Por tanto, la matriz adjunta es:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $2020A$, tenemos:

$$(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020}A^{-1} = -\frac{1}{18180}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{(2020A)^{-1} = -\frac{1}{18180}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 4. Geometría

Siendo $\mathbf{a \neq 0}$, considera las rectas

$$\mathbf{r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} \qquad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}}$$

a) **Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.**

b) **Para $\mathbf{a = 2}$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.**

Solución:

a) **Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.**

Las rectas tienen vectores directores:

$$\vec{v}_r = (1, 1, a), \quad \vec{v}_s = (-a, -1, 2)$$

Comprobamos si pueden ser paralelas:

$$\vec{v}_r = k\vec{v}_s \quad \Rightarrow \quad (1, 1, a) = k(-a, -1, 2).$$

Esto genera el sistema:

$$1 = -ka, \quad 1 = -k, \quad a = 2k.$$

De la segunda ecuación, tenemos $k = -1$. Sustituyendo en la primera y tercera:

$$1 = -(-1)a \quad \Rightarrow \quad a = 1, \quad \text{y} \quad a = 2(-1) = -2.$$

No existe un valor común para a, luego las rectas nunca son paralelas. Ahora comprobamos si se cortan resolviendo el sistema conjunto:

$$x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = \lambda + 1, \quad y = \lambda + 2, \quad z = a\lambda + 1.$$

$$\frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} = \mu \quad \Rightarrow \quad x = -a\mu + 3, \quad y = -\mu + 3, \quad z = 2\mu - 1.$$

Igualamos ambas parametrizaciones:

$$\lambda + 1 = -a\mu + 3, \quad \lambda + 2 = -\mu + 3, \quad a\lambda + 1 = 2\mu - 1.$$

De la segunda ecuación despejamos fácilmente μ:

$$\lambda + 2 = -\mu + 3 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 - \lambda.$$

Sustituyendo μ en la primera y tercera ecuación:

$$\lambda + 1 = -a(1-\lambda) + 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda + 1 = -a + a\lambda + 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda(1-a) = 2 - a,$$

$$a\lambda + 1 = 2(1-\lambda) - 1 \quad \Rightarrow \quad a\lambda + 1 = 2 - 2\lambda - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda(a+2) = 0.$$

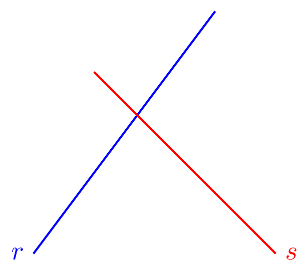
De la segunda, tenemos dos opciones:

- $\lambda = 0$ implica (de la primera ecuación) que

$$2 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

  Entonces, para $a = 2$ se cortan.

– Si $\lambda \neq 0$, entonces
$$a+2=0 \quad \Rightarrow \quad a=-2.$$
Sustituyendo en la primera:
$$\lambda(1+2)=2+2 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda=4 \quad \Rightarrow \quad \lambda=4/3.$$
Entonces, para $a=-2$ también se cortan.



Resumiendo:
– Las rectas se cortan para $a=2$ y $a=-2$.
– Para cualquier otro valor de a, las rectas no son paralelas ni se cortan, por lo que se **cruzan**.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Se cortan si } a=\pm 2;\ \text{se cruzan para cualquier otro valor}}$$

b) Para a = 2, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.

Para $a=2$, las rectas son:
$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}, \quad s \equiv \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$
Primero hallamos el punto de intersección resolviendo el sistema conjunto:
$$r \equiv \begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=\lambda+2 \\ z=2\lambda+1 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x=-2\mu+3 \\ y=-\mu+3 \\ z=2\mu-1 \end{cases}.$$
Igualando ambas parametrizaciones:
$$\lambda+1=-2\mu+3, \quad \lambda+2=-\mu+3, \quad 2\lambda+1=2\mu-1.$$
De la segunda ecuación:
$$\lambda+2=-\mu+3 \quad \Rightarrow \quad \mu=1-\lambda.$$
Sustituyendo en la primera y tercera:
$$\lambda+1=-2(1-\lambda)+3 \quad \Rightarrow \quad \lambda+1=-2+2\lambda+3 \quad \Rightarrow \quad \lambda=0,$$
$$2\lambda+1=2(1-\lambda)-1 \quad \Rightarrow \quad 1=2-2\lambda-1 \quad \Rightarrow \quad \lambda=0.$$
Obtenemos fácilmente $\lambda=0$. Sustituyendo en la parametrización de r:
$$P=(1,2,1).$$

Ahora buscamos la recta perpendicular a ambas. Su vector director es perpendicular a los vectores directores de r y s:

$$\vec{v}_r = (1, 1, 2), \quad \vec{v}_s = (-2, -1, 2).$$

Calculamos el vector perpendicular usando el producto vectorial:

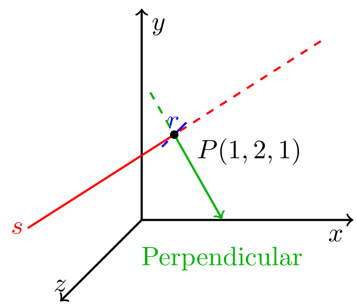
$$\vec{u} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Resolviendo:

$$\vec{u} = (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1), -(1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)), 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2)) = (4, -6, 1).$$

Entonces, la recta perpendicular buscada es:

$$\boxed{\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}}$$



Por tanto, la recta perpendicular buscada es:

$$\boxed{\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}}$$

Ejercicio 5. Análisis

Sea $\mathbf{f} : [\mathbf{0}, \mathbf{2}\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\sin \mathbf{x}}{\mathbf{2} - \cos \mathbf{x}}$.

a) **Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**
b) **Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $\mathbf{x} = \frac{\pi}{3}$.**

Solución:

a) **Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

La función dada es:

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Primero hallamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(2 - \cos x) - (\sin x)(\sin x)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}.$$

Para hallar extremos relativos, igualamos a cero la derivada:

$$2\cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

Evaluamos la función en estos puntos y en los extremos del intervalo $[0, 2\pi]$:

$$f(0) = \frac{\sin 0}{2 - \cos 0} = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2 - \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sin \frac{5\pi}{3}}{2 - \cos \frac{5\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$f(2\pi) = \frac{\sin 2\pi}{2 - \cos 2\pi} = 0.$$

Comparando estos valores, tenemos:
- Valor máximo: $f(\pi/3) = \sqrt{3}/3$,
- Valor mínimo: $f(5\pi/3) = -\sqrt{3}/3$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Máximo absoluto en } x = \frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \text{Mínimo absoluto en } x = \frac{5\pi}{3}, f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

b) **Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $\mathbf{x} = \frac{\pi}{3}$.**

Calculamos primero el punto:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad P = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

La pendiente de la recta tangente es $f'(\pi/3)$:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{3} - 1}{(2-\cos\frac{\pi}{3})^2} = \frac{2\cdot\frac{1}{2} - 1}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{0}{\frac{9}{4}} = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0(x - \frac{\pi}{3}) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La recta normal tiene pendiente infinita (pues la tangente es horizontal), por lo que es vertical. Su ecuación es entonces:

$$x = \frac{\pi}{3}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Tangente: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \text{Normal: } x = \frac{\pi}{3}}$$

Ejercicio 6. Análisis

Sea f la función dada por $\mathbf{f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}}$ para $\mathbf{x \neq 2}$.

a) **Calcula $\int \mathbf{f(x)\,dx}$.**
b) **Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\mathbf{3,5})$.**

Solución:

a) **Calcula $\int \mathbf{f(x)\,dx}$.**

Queremos calcular la integral indefinida de la función $f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}$. Para ello, podemos realizar una división de polinomios o una manipulación algebraica para expresar el numerador en términos del denominador. Consideramos el denominador $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Podemos intentar escribir el numerador $3x^2+4$ en función de $(x-2)$. Sea $u = x-2$, entonces $x = u+2$. Sustituimos esto en la función:

$$f(u+2) = \frac{3(u+2)^2+4}{u^2} = \frac{3(u^2+4u+4)+4}{u^2} = \frac{3u^2+12u+12+4}{u^2} = \frac{3u^2+12u+16}{u^2}.$$

Ahora podemos separar la fracción:

$$f(u+2) = \frac{3u^2}{u^2} + \frac{12u}{u^2} + \frac{16}{u^2} = 3 + \frac{12}{u} + \frac{16}{u^2}.$$

Ahora integramos con respecto a u:

$$\int f(x)\,dx = \int \left(3 + \frac{12}{u} + \frac{16}{u^2}\right) du = \int \left(3 + 12u^{-1} + 16u^{-2}\right) du = \int 3\,du + 12\int u^{-1}\,du + 16\int u^{-2}\,du$$

$$= 3u + 12\ln|u| + 16\frac{u^{-1}}{-1} + C = 3u + 12\ln|u| - \frac{16}{u} + C.$$

Finalmente, sustituimos $u = x-2$ de vuelta en la expresión:

$$\int f(x)\,dx = 3(x-2) + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C.$$

Expandiendo el primer término:

$$\int f(x)\,dx = 3x - 6 + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = 3x - 6 + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C}$$

b) **Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\mathbf{3,5})$.**

Del apartado anterior, sabemos que la familia de primitivas de $f(x)$ es:

$$F(x) = 3x - 6 + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C.$$

Queremos encontrar la primitiva cuya gráfica pasa por el punto $(3,5)$, lo que significa que $F(3) = 5$. Sustituimos $x = 3$ en la expresión para $F(x)$:

$$F(3) = 3(3) - 6 + 12\ln|3-2| - \frac{16}{3-2} + C = 9 - 6 + 12\ln|1| - \frac{16}{1} + C.$$

Sabemos que $\ln|1| = 0$, así que:

$$F(3) = 3 + 12(0) - 16 + C = 3 - 16 + C = -13 + C.$$

Como $F(3) = 5$, tenemos:

$$5 = -13 + C.$$

Despejamos la constante C:

$$C = 5 + 13 = 18.$$

Sustituimos el valor de C en la expresión para $F(x)$:

$$F(x) = 3x - 6 + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + 18.$$

Simplificando la expresión:

$$F(x) = 3x + 12 + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{F(x) = 3x + 12 + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2}}$$

Ejercicio 7. Álgebra

Considera $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$**,** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$**.**

a) **Discute el sistema dado por $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, según los valores de a.**

b) **Para $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, resuelve el sistema dado por $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Calcula, si es posible, una solución en la que $\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{4}$.**

Solución:

a) **Discute el sistema dado por $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, según los valores de a.**

El sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ tiene como matriz de coeficientes A y matriz ampliada $A^* = [A|B]$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{array}\right).$$

Calculamos el rango de la matriz A mediante determinantes. El determinante de A es:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (0 \cdot 4 - 1 \cdot 1) - 1 \cdot (1 \cdot 4 - 1 \cdot 4) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 4) = -1 - 0 + 1 = 0.$$

Como $\det(A) = 0$, el rango de A es menor que 3. Consideramos un menor de orden 2, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Entonces, el rango de A es 2. Ahora calculamos el rango de la matriz ampliada A^*. Consideramos el determinante de la submatriz de orden 3 formada por las columnas 1, 2 y 4 de A^*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a \\ 4 & 1 & 3a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2a \\ 1 & 3a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ 4 & 3a \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (0 \cdot 3a - 2a \cdot 1) - 1 \cdot (1 \cdot 3a - 2a \cdot 4) + a \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 4)$$
$$= -2a - (3a - 8a) + a(1) = -2a - (-5a) + a = -2a + 5a + a = 4a.$$

Discusión según los valores de a:

- Si $4a \neq 0$, es decir, $a \neq 0$, entonces $\text{rango}(A^*) = 3$, mientras que $\text{rango}(A) = 2$. Como $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$, el sistema es incompatible (no tiene solución).
- Si $4a = 0$, es decir, $a = 0$, entonces el determinante de la submatriz considerada es 0. La matriz ampliada es:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

En este caso, el rango de A^* es igual al rango de A, que es 2. Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3$ (número de incógnitas), el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } a \neq 0, & \text{el sistema es incompatible} \\ \text{Si } a = 0, & \text{el sistema es compatible indeterminado} \end{cases}}$$

b) **Para $\mathbf{a = 0}$, resuelve el sistema dado por $\mathbf{AX = B}$. Calcula, si es posible, una solución en la que $\mathbf{y + z = 4}$.**

Para $a = 0$, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ 4x + y + 4z &= 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, obtenemos $x = -z$. Sustituyendo esto en la primera ecuación:

$$(-z) + y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Sustituyendo $x = -z$ e $y = 0$ en la tercera ecuación:

$$4(-z) + 0 + 4z = -4z + 4z = 0.$$

La tercera ecuación se cumple siempre. Por lo tanto, la solución general del sistema para $a = 0$ es $(x, y, z) = (-z, 0, z)$, donde z es cualquier número real. Ahora, buscamos una solución en la que $y + z = 4$. Sustituyendo $y = 0$ en esta condición, tenemos:

$$0 + z = 4 \quad \Rightarrow \quad z = 4.$$

Para este valor de z, encontramos el valor de x:

$$x = -z = -4.$$

Entonces, la solución en la que $y + z = 4$ es $(x, y, z) = (-4, 0, 4)$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{La solución general para } a = 0 \text{ es } (x, y, z) = (-z, 0, z), z \in \mathbb{R}. \text{ Una solución con } y + z = 4 \text{ es } (-4, 0, 4)}$$

Ejercicio 8. Geometría

Se considera el punto $\mathbf{A(1,-2,0)}$ y la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$.

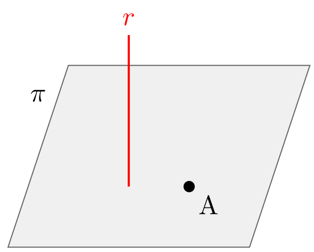
a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

Solución:

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

La recta r está dada como la intersección de dos planos. Para encontrar su vector director, calculamos el producto vectorial de los vectores normales de estos planos. Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (1,1,0)$ y $\vec{n}_2 = (0,1,-3)$.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1\cdot(-3) - 0\cdot 1)\vec{i} - (1\cdot(-3) - 0\cdot 0)\vec{j} + (1\cdot 1 - 1\cdot 0)\vec{k} = (-3,3,1).$$



El plano que pasa por $A(1,-2,0)$ y es perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de r, es decir, $\vec{n}_\pi = (-3,3,1)$. La ecuación del plano es de la forma $n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0)=0$.

$$-3(x-1)+3(y-(-2))+1(z-0)=0 \quad \Rightarrow \quad -3x+3y+z+9=0.$$

Por lo tanto, la solución es:

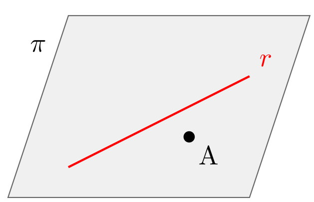
$$\boxed{-3x+3y+z+9=0}$$

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

El plano que contiene a la recta r debe contener un punto de r y su vector director. También debe pasar por el punto A. Primero, encontramos un punto de la recta r. Hacemos $z=0$ en las ecuaciones de r:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Rightarrow y=-2 \quad \Rightarrow \quad x=-y=2.$$

Así, el punto $P(2,-2,0)$ pertenece a la recta r. El vector director de r es $\vec{v}_r = (-3,3,1)$. El plano que buscamos está determinado por el punto $A(1,-2,0)$ y la recta que pasa por $P(2,-2,0)$ con vector director $\vec{v}_r = (-3,3,1)$.



Consideramos el vector

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (1-2, -2-(-2), 0-0) = (-1, 0, 0).$$

El vector normal del plano será perpendicular a $\vec{v}_r$ y a $\overrightarrow{PA}$. Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \overrightarrow{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (3\cdot 0 - 1\cdot 0)\vec{i} - (-3\cdot 0 - 1\cdot(-1))\vec{j} + (-3\cdot 0 - 3\cdot(-1))\vec{k} = (0, -1, 3).$$

La ecuación del plano con vector normal $(0, -1, 3)$ que pasa por $A(1, -2, 0)$ es:

$$0(x-1) - 1(y-(-2)) + 3(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y - 3z + 2 = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{y - 3z + 2 = 0}$$